Version 2.8.2007 Mai 2007

MIIA – Differentialrechnung mehrerer reeller Veränderlicher – SoSe 2007

Kurzfassung

Martin Schottenloher

$\infty\infty\infty$

Kapitel IX. Kurven und Vektorfelder

Teil B ($\S\ 28 - 30$)

§28 Das Riemann-Stieltjes-Integral

Der Integralbegriff für Funktionen in einer Veränderlichen (mit Werten in $\mathbb{R}$ oder auch vektorwertig) wird in diesem Paragrafen auf andere Weise als bisher gesehen und neu eingeführt. Damit wird als weitere Verallgemeinerung der Integration das *Integral von Riemann-Stieltjes* beschrieben und untersucht, das für die Definition des Arbeitsintegrals im nächsten Paragrafen Verwendung findet und auch sonst von großem Interesse ist.

Die Riemann-Stieltjes Integration findet zum Beispiel Anwendung in der Spektraltheorie von nicht beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum (und damit in grundlegender Weise in der **Quantenphysik**), und sie ist von Nutzen bei der Beschreibung der stochastischen Integration, die u.a. in der **Finanzmathematik** von Bedeutung ist.

Eine Motivation zu dem neuen Konzept des Riemann-Stieltjes-Integrals, die sich physikalischer Konstruktionen und Überlegungen bedient, wird zum Schluss dieses Paragrafen in 28.16 gegeben.

Als mathematisch orientierte Motivation wird das Resultat von Satz 27.13 noch einmal anders formuliert. Diese Neuformulierung wird als Ausgangspunkt für die neue Definition genommen.

Notationen:

In diesem Paragrafen ist $J = [a, b]$ wieder ein kompaktes Intervall, E ist ein Banachraum über $\mathbb{K}$ und $f : J \to E$ ist eine Funktion, die im allgemeinen auch unstetig oder sogar unbeschränkt sein darf.

Dazu kommt noch eine skalare Funktion $\mu : J \to \mathbb{K}$ die wir „Integrator“ nennen.

Die Menge der Zerlegungen eines Intervalls J werde mit $\mathcal{Z}(J)$ bezeichnet, und für eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(J)$ sei Z_* die Menge aller *Zwischenvektoren*. Also bedeutet $Z \in \mathcal{Z}(J)$, dass $Z = \{t_k : k = 0, 1, \ldots, m\}, a = t_0\,, t_{k-1} < t_k\,, t_m = b$ gilt (mit den *Zerlegungspunkten* $t_k \in Z$ und den *Zwischenintervallen* $]t_{k-1}, t_k[$). Und $\tau \in Z_*$ bedeutet $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ mit $\tau_k \in\,]t_{k-1}, t_k[$.[1]

[1] Hier gibt es die Alternative, auch noch $\tau_k = t_{k-1}$ und / oder $\tau_k = t_k$ zuzulassen, die Zwischenintervalle also halboffen oder abgeschlossen zu nehmen. Für die Integration von stetigen $f : J \to E$ gibt das keinen Unterschied, im allgemeinen aber wird der weiter unten eingeführte Begriff des Riemann-Stieltjes-Integrals geringfügig anders ausfallen als mit unserer Festsetzung.

Die Feinheit dieser Zerlegung $Z = \{t_k\}$ ist $\Delta(Z) := \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, 2, \ldots, m\}$.

Für $Z \in \mathcal{Z}(J)$ und $\tau \in Z_*$ setze

$$S(f, Z, \tau) := \sum_{k=1}^{m} f(\tau_k)(t_k - t_{k-1}) .$$

Der Beweis zu Satz 27.13 liefert für stetige $f : J \to E$ das folgende Resultat:

(28.1) Satz: *Sei $f \in \mathcal{C}(J, E)$. Dann gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall Z \in \mathcal{Z}(J) \forall \tau \in Z_* : \Delta(Z) < \delta \Longrightarrow \left\| S(f, Z, \tau) - \int_a^b f(t)\, dt \right\| < \varepsilon .$$

Für allgemeine $f \in \mathcal{S}$ gilt dieselbe Aussage. Das lässt sich direkt aus der Definition 25.11 ablesen.

Der Integrator μ kommt jetzt ins Spiel.

(28.2) Definition: (Riemann-Stieltjes-Integral) Zu jeder Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \ldots t_m\}$ und jedem Zwischenvektor $\tau \in Z_*$ wird die endliche Summe

$$S_\mu(f, Z, \tau) := \sum_{k=1}^{m} f(\tau_k)\big(\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})\big)$$

gebildet. Diese Summe wird *Riemann-Stieltjes-Summe* oder auch *Riemann-Summe* genannt (kurz: *RS-Summe)*. Wenn die folgende „Konvergenz“ von $\big(S_\mu(f, Z, \tau)\big)_{Z \in \mathcal{Z}(J)}$ gegen $S \in E$ vorliegt, also

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall Z \in \mathcal{Z}(J) \; \forall \tau \in Z_* : \Delta(Z) < \delta \Longrightarrow \|S - S_\mu(f, Z, \tau)\| < \varepsilon$$

gilt, so heißt dieser Grenzwert S das *Riemann-Stieltjes-Integral von f auf J zum Integrator μ* und S wird mit $\int_a^b f\, d\mu := S$ bezeichnet. [12.6.07]

Die Notation bedeutet daher:

$$\int_a^b f\, d\mu = \lim_{\Delta(Z) \to 0} S_\mu(f, Z, \tau) .$$

Will man auch in dieser Situation eine Integrationsvariable hervorheben, so schreibt man z.B. auch $\int_a^b f(t)\, d\mu(t)$ für das RS-Integral.

f heißt *Riemann-Stieltjes-integrierbar bezüglich* μ (kurz: *RS-integrierbar*), wenn das Riemann-Stieltjes-Integral (kurz: *RS-Integral*) $\int_a^b f\, d\mu$ zu μ existiert. Mit $\mathcal{R}(\mu) = \mathcal{R}(\mu)(J, E)$ wird die Menge der bezüglich μ RS-integrierbaren Funktionen auf J mit Werten in E bezeichnet.

Man beachte, dass zunächst an f oder an μ keine Stetigkeits- oder Beschränktheitsbedingungen gestellt werden.

(28.3) Lemma: *Sei μ ein beliebiger Integrator. Für eine Funktion $f : J \to E$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1° *f ist RS-integrierbar bezüglich μ, also $f \in \mathcal{R}(\mu)$.*

2° (Cauchybedingung) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, Z, Z' \in \mathcal{Z}(J)\ \forall\, \tau \in Z_*\ \forall\, \tau' \in Z'_*$:

$$\max\{\Delta(Z), \Delta(Z')\} < \delta \Longrightarrow \big\| S_\mu(f, Z, \tau) - S_\mu(f, Z', \tau') \big\| < \varepsilon\,.$$

3° („Jede Riemannfolge konvergiert“:) *Für alle Zerlegungsfolgen $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $Z^n \in \mathcal{Z}(J)$, mit $\Delta(Z^n) \to 0$ und für beliebige Zwischenvektoren $\tau^n \in Z^n_*$ konvergiert die Folge $(S_\mu(f, Z^n, \tau^n))$* in E.

Die Grenzwerte in 3° sind alle dieselben und sie stimmen mit dem RS-Integral $\int_a^b f\, d\mu$ überein:

$$\lim_{n\to\infty} S_\mu(f, Z^n, \tau^n) = \int_a^b f\, d\mu\,.$$

(28.4) Folgerungen:

1° *$\mathcal{R}(\mu)$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und das Integral $f \mapsto \int_a^b f\, d\mu$ ist eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\mathcal{R}(\mu) \to E$.*[2]

2° *Die Integration ist außerdem auch im Integrator linear:*
Für einen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{R}(\mu) = \mathcal{R}(\lambda\mu)$ und es gilt $\int_a^b f\, d(\lambda\mu) = \lambda \int_a^b f\, d\mu$.[3]
Und für $f \in \mathcal{R}(\mu) \cap \mathcal{R}(\nu)$ gilt $f \in \mathcal{R}(\mu + \nu)$ mit $\int_a^b f\, d(\mu+\nu) = \int_a^b f\, d\mu + \int_a^b f\, d\nu$.

3° Die Aufteilung der Integration klappt wie zuvor: Ist $f \in \mathcal{R}(\mu)(J, E)$, so folgt für Zwischenpunkte $c \in [a, b]$ stets $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}(\mu|_{[a,c]})$ und $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}(\mu|_{[c,b]})$, und es gilt

$$\int_a^b f\, d\mu = \int_a^c f\, d\,\mu + \int_c^b f\, d\mu\,.$$

Beweis: Ad 1° $S_\mu(f + \lambda g, Z^n, \tau^n) = S_\mu(f, Z^n, \tau^n) + \lambda S_\mu(g, Z^n, \tau^n) \ \longrightarrow\ \int_a^b f\, d\mu + \lambda \int_a^b g\, d\mu\,.$
Ad 2° $S_{\lambda\mu}(f, Z^n, \tau^n) = \lambda S_\mu(f, Z^n, \tau^n) \ \longrightarrow\ \lambda \int_a^b f\, d\mu\,.$
$S_{\mu+\nu}(f, Z^n, \tau^n) = S_\mu(f, Z^n, \tau^n) + S_\nu(f, Z^n, \tau^n) \ \longrightarrow\ \int_a^b f\, d\mu + \int_a^b f\, d\nu\,.$
Ad 3° Sei $Z^n = Z'^n \cup Z''^n$ eine Zerlegung von J, wobei Z'^n bzw. Z''^n Zerlegungen der Teilintervalle $[a, c]$ bzw. $[c, b]$ sind. Dann ist $Z'^n \cap Z''^n = \{c\}$. Es sei $Z^n = \{t^n_k : k = 0, 1, \ldots, m^n\}$ mit $t^n_{j^n} = c$. Dann gilt für $\tau^n = (\tau'^n, \tau''^n)$, $\tau'^n \in Z'^n_*$, $\tau''^n \in Z''^n_*$:

$$\begin{aligned} S_\mu(f, Z^n, \tau^n) = \sum_{k=1}^{m^n} f(\tau^n_k)(\mu(t^n_k) - \mu(t^n_{k-1})) = \\ \sum_{k=1}^{j^n} f(\tau^n_k)(\mu(t^n_k) - \mu(t^n_{k-1})) + \sum_{k=j^n+1}^{m^n} f(\tau^n_k)(\mu(t^n_k) - \mu(t^n_{k-1})) = \\ S_\mu(f, Z'^n, \tau'^n) + S_\mu(f, Z''^n, \tau''^n) \ \longrightarrow\ \int_a^c f\, d\mu + \int_c^b f\, d\mu\,. \end{aligned}$$

■

Die Umkehrung der letzten Aussage ist im allgemeinen falsch, siehe 28.5°.

[2] Zur Stetigkeit kommen wird gleich in 28.12.

[3] An dieser Aussage wird deutlich, dass man im Falle eines Banachraumes E über $\mathbb{C}$ gegebenenfalls auch komplexwertige Integratoren $\mu : J \to \mathbb{C}$ zulassen sollte. Die Theorie funktioniert im wesentlichen genauso.

Der Rest des Paragrafen wurde nur zum Teil in der Vorlesung vorgetragen, und zwar: Die ersten Beispiele 28.5.1°–3°, Bemerkungen zum Unter- und Oberintegral (28.8), RS-Integrierbarkeit zu Integratoren mit beschränkter Variation (28.12), und vor allem die Formel

$$\int_a^b f(t)\,d\mu = \int_a^b f(t)\dot{\mu}(t)\,dt$$

für stetige f und stetig differenzierbare μ in 28.13.

(28.5) Beispiele:

1° Im Falle $\mu = \mathrm{id}_J$, d.h. $\mu(t) = t$ für alle $t \in J$, ist das RS-Integral für stetige f nach 28.1 dasselbe wie das im letzten Paragrafen definierte Integral $\int_a^b f(t)\,dt$. Ebenso für $f \in \mathcal{S}$. Das neue Integral ist aber für weitere Funktionen definiert, d.h. $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}(\mu)$ mit $\mathcal{S} \neq \mathcal{R}(\mu)$ im Falle $\mu = \mathrm{id}_J$. (Siehe unten in 28.7, wo dieser Fall ausführlicher behandelt wird, sowie die Charakterisierung in 28.10).

2° Im Falle $\mu = c$ (also μ konstant) verschwinden alle RS-Summen, und es folgt $\int_a^b f\,d\mu = 0$. Alle Funktionen sind daher RS-integrierbar bezüglich $\mu = c$, aber das Integral ist trivial.

3° Sei $x \in [a,b]$, $x \neq a$, fest. Für den Integrator $\mu(t) := 0$, $a \leq t < x$, und $\mu(t) = 1$, $x \leq t \leq b$ (also $\mu = \chi_{[x,b]}$, die charakteristische Funktion von $[x,b]$), ist $S_\mu(f,Z,\tau) = f(\tau_k)\big(\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})\big) = f(\tau_k)$, wenn $x \in \,]t_{k-1},t_k]$. Da sowohl $\tau_k \leq x$ wie auch $x < \tau_k$ auftreten kann, erweist sich f genau dann RS-integrierbar in Bezug auf μ, wenn $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ gilt, also f in x stetig ist, und es ist dann $\int_a^b f\,d\mu = f(x)$.

Analog für $\nu = \chi_{]x,b]}$, $a \leq x < b$: f ist genau dann RS-integrierbar bezüglich ν, wenn f in x stetig ist mit $\int_a^b f\,d\nu = f(x)$.

4° Es folgt für $\mu = h\chi_{[a,x[}$, $h \in \mathbb{R}$: $\int_a^b f\,d\mu = -hf(x)$ für in x stetige f wegen $\chi_{[a,x[} = 1 - \chi_{[x,b]}$ und wegen 2°.

Ebenso für $\mu = h\chi_{[a,x]}$: $\int_a^b f\,d\mu = -hf(x)$

Schließlich für $\mu = h\chi_{]x,y]}$, $a < x < y < b$: $\int_a^b f\,d\mu = h\big(f(x) - f(y)\big)$, wenn f in x und y stetig ist.

5° Aus 2° und 3° erhalten wir das folgende Beispiel für $a < c < b$. Für den Integrator $\mu := \chi_{[c,b]}$ und die Funktion $f := \chi_{]c,b]}$ ist $f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}(\mu|_{[a,c]})([a,c]\,,\mathbb{R})$ in Bezug auf das Intervall $[a,c]$, da $f|_{[a,c]} = 0$, und es ist $f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}(\mu|_{[c,b]})([c,b]\,,\mathbb{R})$, weil $\mu|_{[c,b]} = 1$ konstant ist (vgl. 2°). Es gilt aber nach 3°, dass f in c stetig sein muss, um $f \in \mathcal{R}(\mu)([a,b]\,,\mathbb{R})$ zu erfüllen.

Die Umkehrung von 28.4.3° ist also nicht allgemein gültig, weil das Integral $\int_a^b f\,d\mu$ nicht existiert ($\mu = \chi_{[c,b]}$), die Integrale über $[a,c]$ und $[c,b]$ aber beide existieren.

6° Sei $A = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ eine Zerlegung von J, und es seien $\mu_k \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, $k = 1,2,\dots,m$. Sei μ die Treppenfunktion, die durch $\mu(a) := \mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu|_{]a_{k-1},a_k]} := \mu_k\chi_{]a_{k-1},a_k]}$ für $k = 1,2,\dots,m$ definiert ist. Eine Funktion $f : J \to E$ gehört genau dann zu $\mathcal{R}(\mu)$, wenn f in den Punkten von $A\backslash\{a,b\}$ stetig ist. Es ist dann

$$\int_a^b f\,d\mu = \sum_{k=1}^{m-1} f(a_k)(\mu_{k+1} - \mu_k)\,,$$

denn nach 4° gilt $\int_a^b f\,d(\mu_1\chi_{[a_0,a_1]}) = -\mu_1 f(a_1)$, $\int_a^b f\,d(\mu_k\chi_{]a_{k-1},a_k]}) = \mu_k(f(a_{k-1}) - f(a_k))$ $(1 < k < m)$ und nach 3° $\int_a^b f\,d(\mu_m\chi_{]a_{m-1},a_m]}) = \mu_m f(a_{m-1})$.

$h_k := \mu_{k+1} - \mu_k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,\dots,m-1$, ist die Höhe der Sprünge, die diese Treppenfunktion

μ in den Stellen $a_k \in A\backslash\{a,b\}$ macht, und wir erhalten für stetige f die einfache Formel

$$\int_a^b f\,d\mu = \sum_{k=1}^{m-1} f(a_k)h_k\,.$$

Diese Formel ist mit der Sehnentrapezregel verwandt.

7° Für eine streng monoton wachsende Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $J=[a,b]$ mit $t_n \to b$ sei μ durch $\mu(t) := 0$ für $a \le t \le t_0$, $\mu(t) := k$ für $t_{k-1} < t \le t_k$ und $\mu(b) := 0$ definiert. Dann ist eine Funktion $f : J \to E$ immer schon dann RS-integrierbar zu μ, wenn f in allen Punkten t_n stetig ist und wenn die Reihe $\sum f(t_n)$ konvergiert. Es gilt

$$\int_a^b f\,d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(t_n)\,.$$

Insofern ordnet sich die Theorie der Konvergenz von Reihen der RS-Integrationstheorie unter.

Die RS-Integrierbarkeit einer Funktion $f : J \to E$ zu einem vorgegebenen Integrator μ lässt sich mit Hilfe der Oszillation von f und der Oszillation von f in Bezug auf μ beschreiben und untersuchen. Dabei ist die *Oszillation von* f in einer Teilmenge $B \subset J$ durch

$$\omega(f,B) := \sup\{\|f(t)-f(s)\| : s,t \in B\}\,,$$

und die Oszillation von f in dem Punkte $t \in J$

$$\omega(f,t) := \inf\{\omega(f,B) : t \in B \text{ und } B \text{ offen}\}\,.$$

Offensichtlich ist f in t genau dann stetig, wenn $\omega(f,t) = 0$ gilt.[4]

Wegen der Ungleichung

$$\left\|S_\mu(f,Z,\tau) - S_\mu(f,Z,\tau')\right\| \le \sum_{k=1}^{m} \omega(f,]t_{k-1},t_k[)\,|\mu(t_k)-\mu(t_{k-1})| =: \omega_\mu(f,Z)$$

kontrolliert die *Oszillation* $\omega_\mu(f,Z)$ *in Bezug auf* μ die RS-Integrierbarkeit:

(28.6) Lemma: Sei $\mu : J \to \mathbb{R}$ monoton.

1° *Wenn* $\omega_\mu(f,Z) \longrightarrow 0$ *für* $\Delta(Z) \to 0$ *dann ist* f *RS-integrierbar bezüglich* μ.

2° *Im Falle* $E = \mathbb{R}$ *hat man die folgende Umkehrung von 1°: Es gilt* $\omega_\mu(f,Z) \to 0$ *für* $\Delta(Z) \to 0$ *bereits, wenn* $f \in \mathcal{R}(\mu)$.

Dabei bedeutet $\omega_\mu(f,Z) \longrightarrow 0$ für $\Delta(Z) \to 0$ wie zuvor:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,Z \in \mathcal{Z}(J) : \Delta(Z) < \delta \implies \omega_\mu(f,Z) < \varepsilon\,,$$

oder äquivalent dazu: Für alle Zerlegungsfolgen (Z^n) in $\mathcal{Z}(J)$ gilt:

$$\Delta(Z^n) \to 0 \implies \lim_{n\to\infty} \omega_\mu(f,Z^n) = 0\,.$$

[4] Die Oszillation gibt genauso Sinn für den allgemeineren Fall von Abbildungen $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen.

Beweis:[5] Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei μ eine monoton wachsende Funktion.

Ad 1°. Sei $Z \in \mathcal{Z}(J)$ eine Zerlegung, die um einen Unterteilungspunkt $t \in]t_{k-1}, t_k[$ verfeinert wird zur Zerlegung Z'. Sei τ ein Zwischenvektor zu Z. Dann gilt für jeden Zwischenvektor τ' zu Z': $\tau'_j \in]t_{j-1}, t_j[$ für $j < k$, $\tau'_k \in]t_{k-1}, t[$, $\tau'_{k+1} \in]t, t_k[$, sowie $\tau'_{j+1} \in]t_{j-1}, t_j[$ für $k < j < m+1$. Wegen der Monotonie ist

$$\begin{aligned}\big\|f(\tau_k)\big(\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})\big) - f(\tau'_k)\big(\mu(t) - \mu(t_{k-1})\big) - f(\tau'_{k+1})\big(\mu(t_k) - \mu(t)\big)\big\| = \\ \big\|\big(f(\tau_k) - f(\tau'_k)\big)\big(\mu(t) - \mu(t_{k-1})\big) + \big(f(\tau_k) - f(\tau'_{k+1})\big)\big(\mu(t_k) - \mu(t)\big)\big\| \le \\ \omega(f,]t_{k-1}, t_k[)\big(\mu(t) - \mu(t_{k-1})\big) + \omega(f,]t_{k-1}, t_k[)\big(\mu(t_k) - \mu(t)\big) = \\ \omega(f,]t_{k-1}, t_k[)\big(\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})\big)\end{aligned}$$

und wegen

$$\begin{aligned}S_\mu(f, Z, \tau) - S_\mu(f, Z', \tau') = \\ \sum_{j<k}\big(f(\tau_j) - f(\tau'_j)\big)\big(\mu(t_j) - \mu(t_{j-1})\big) + \sum_{j>k}^{m}\big(f(\tau_j) - f(\tau'_{j+1})\big)\big(\mu(t_j) - \mu(t_{j-1})\big) + \\ + f(\tau_k)\big(\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})\big) - f(\tau'_k)\big(\mu(t) - \mu(t_{k-1})\big) - f(\tau'_{k+1})\big(\mu(t_k) - \mu(t)\big)\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\|S_\mu(f, Z, \tau) - S_\mu(f, Z', \tau')\| \le \\ \sum_{j\ne k}^{m}\omega(f,]t_{j-1}, t_j[)\big(\mu(t_j) - \mu(t_{j-1})\big) + \omega(f,]t_{k-1}, t_k[)\big(\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})\big) = \omega_\mu(f, Z).\end{aligned}$$

Wenn Z' irgendeine Verfeinerung von Z ist, also $Z \subset Z'$, so folgt wieder $\|S_\mu(f, Z, \tau) - S_\mu(f, Z', \tau')\| \le \omega_\mu(f, Z)$, wie man durch Induktion sieht. Daher hat man für eine weitere Verfeinerung Z'' von Z die Abschätzung

$$\|S_\mu(f, Z'', \tau'') - S_\mu(f, Z', \tau')\| \le 2\omega_\mu(f, Z)\,.$$

Daraus folgt aber unter Verwendung der Cauchybedingung 28.3.2° die Behauptung.

Ad 2°. Sonst gäbe es eine Zerlegungsfolge (Z^n) mit $\omega_\mu(f, Z^n) \ge \varepsilon_0 > 0$ und $\Delta(Z^n) \to 0$. Wegen

$$S_\mu(f, Z^n, \tau) - S_\mu(f, Z^n, \tau') = \sum_{k=1}^{m^n}\big(f(\tau_k) - f(\tau'_k)\big)\big(\mu(t_k^n) - \mu(t_{k-1}^n)\big)$$

für Zwischenvektoren τ, τ' zu Z^n, wegen

$$\omega_\mu(f, Z^n) = \sum_{k=1}^{m^n}\omega(f,]t_{k-1}^n, t_k^n[)\big(\mu(t_k)^n - \mu(t_{k-1}^n)\big)$$

und wegen

$$\omega(f,]t_{k-1}^n, t_k^n[) = \sup\{f(t) - f(s) : s, t \in \big]t_{k-1}^n, t_k^n\big[\}$$

gibt es τ^n, τ'^n mit

$$\big(f(\tau_k^n) - f({\tau'}_k^n)\big)\big(\mu(t_k^n) - \mu(t_{k-1}^n)\big) \ge \omega(f,]t_{k-1}^n, t_k^n[)\big(\mu(t_k^n) - \mu(t_{k-1}^n)\big) - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{m^n}$$

und daher

$$S_\mu(f, Z^n, \tau^n) - S_\mu(f, Z^n, \tau'^n) \ge \omega_\mu(f, Z^n) - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \ge \frac{1}{2}\varepsilon_0 > 0$$

im Widerspruch zur RS-Integrierbarkeit von f. ■

[5] elementar aber länglich

(28.7) Das Riemannsche Integral: Sei $\mu = \mathrm{id}_J$, d.h. $\mu(t) = t$ für alle $t \in J$.

1° Dann ist für $f \in \mathcal{S}$, also insbesondere für stetige f, das neu eingeführte Integral gerade das Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ aus dem vorangehenden Paragrafen.

2° Für allgemeine $f : J \to E$ (aus $\mathcal{B}$ oder auch nicht) heißt das neue Integral das *Riemann-Integral* und es wird ebenfalls mit $\int_a^b f(t)\,dt$ bezeichnet. Eine Funktion $f : J \to E$ heißt *Riemann-integrierbar*, wenn das Riemann-Integral (also das Riemann-Stieltjes-Integral zum Integrator id_J) existiert, wenn also $f \in \mathcal{R}(\mathrm{id}_J)$. Die Ergebnisse des letzten Paragrafen besagen, dass die Klasse $\mathcal{R} = \mathcal{R}(J,E) := \mathcal{R}(\mathrm{id}_J)(J,E)$ der Riemann-integrierbaren Funktionen die sprungstetigen Funktionen $\mathcal{S}(J,E)$ umfasst.

3° $\mathcal{R}$ ist echt größer als $\mathcal{S}$, und natürlich ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ (nach 28.4). Beispielsweise ist die Funktion $f(2^{-n}) := 1\,,\ f(t) = 0\,,\ t \in [0,1] \setminus \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$, Riemann-integrierbar mit Integral $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, wie man direkt nach Definition sieht, aber f ist nicht in $\mathcal{S}$.

Es gibt viele weitere beschränkte Funktionen, die Riemann-integrierbar aber nicht sprungsstetig sind (vgl. 28.10). Aber auch die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen ist noch nicht groß genug für eine effiziente Integrationstheorie, dazu benötigt man die Theorie des Lebesgue-Integrals, die in der nachfolgenden Vorlesung MIII im WS 07/08 dargestellt wird.

(28.8) Ober - und Unterintegral: Im Falle $E = \mathbb{R}$ ist es naheliegend, auch die Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ einzubeziehen (wie das bereits in 28.6.2° geschehen ist), und für eine beliebige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Ausdrücke

$$\overline{\int_a^b} f(t)\,dt := \inf\left\{\int_a^b g(t)\,dt : g \in \mathcal{T}\,,\ g \geq f\right\}$$

$$\underline{\int_a^b} f(t)\,dt := \sup\left\{\int_a^b h(t)\,dt : h \in \mathcal{T}\,,\ h \leq f\right\}$$

zu studieren, das *Oberintegral* und das *Unterintegral* (nach Darboux).

Beide Grenzwerte existieren in jedem Fall als Größen der erweiterten Zahlengeraden $[-\infty, \infty]$ und es ist offensichtlich stets

$$\overline{\int_a^b} f(t)\,dt \geq \underline{\int_a^b} f(t)\,dt\,.$$

Im Falle $\mathbb{R} = E$ findet man mit der fundamentalen Konstruktion im Beweis von 27.13 zu einer stetigen reellwertigen Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ stets Treppenfunktionen $h_n \in \mathcal{T}(J,R)$ mit $h_n \to f$ in $\mathcal{B}(J,\mathbb{R})$ und $h_n \leq f$, das heißt $h_n(t) \leq f(t)$, und ebenso $g_n \in \mathcal{T}$ mit $g_n \to f$ und $g_n \geq f$.

Es gilt also

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sup\left\{\int_a^b h(t)\,dt\ :\ h \in \mathcal{T}\,,\ h \leq f\right\} = \underline{\int_a^b} f(t)\,dt$$

und ebenso

$$\int_a^b f(t)\,dt = \inf\left\{\int_a^b h(t)\,dt\ :\ g \in \mathcal{T}\,,\ g \geq f\right\} = \overline{\int_a^b} f(t)\,dt\,.$$

Diese Eigenschaft verallgemeinert sich zu:

(28.9) Satz: *Eine beschränkte, reellwertige Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn Ober- und Unterintegral übereinstimmen. Es ist dann*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \overline{\int_a^b} f(t)dt = \underline{\int_a^b} f(t)\,dt\,.$$

Der Beweis dieser Aussage ergibt sich direkt aus dem Lemma 28.6.

Interessant, aber auch viel schwerer zu beweisen (siehe unten), ist die folgende externe Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit:

(28.10) Satz: *Eine reellwertige und beschränkte Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn f außerhalb einer Nullmenge $A \subset J$ stetig ist.*

Vor dem Beweis die relevante Definition:

(28.11) Definition: Eine Teilmenge $A \subset J$ heißt *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Folgen $a_n \in J$ und $r_n > 0$ mit $A \subset \bigcup_n]a_n - r_n, a_n + r_n[$ und mit $\sum_{n=0}^{\infty} r_n < \varepsilon$ gibt.

Entsprechend im $\mathbb{R}^n$: $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Überdeckung $A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} B(a_n, r_n)$ durch höchstens abzählbar viele Kugeln $B(a_n, r_n)$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} r_n < \varepsilon$ gibt.

Die Aussage ist unabhängig von der Form der Kugeln, das heißt unabhängig von der verwendeten Norm. Die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} r_n < \varepsilon$ ist proportional zu einem vernünftig definierten Volumen der Vereinigung der unendlich vielen Kugeln (jedenfalls im disjunkten Fall, ansonsten $\geq$ einem Volumen).

Eine andere Formulierung im Falle $\mathbb{R}$: $A \subset J$ ist Nullmenge, wenn A zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Überdeckung aus lauter offenen Intervallen I_n der Länge l_n hat, so dass die Reihe $\sum l_n$ konvergiert mit einen Grenzwert $\sum l_n < \varepsilon$.

Offensichtlich ist jede abzählbare Teilmenge $A \subset J$ eine Nullmenge, daher kann man an dem Resultat 28.10 erkennen, dass die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen wesentlich größer ist als die der sprungstetigen Funktionen.

Es gilt sogar, dass eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen $A_j, j \in \mathbb{N}_1$, wieder eine Nullmenge ist: Zu $\varepsilon > 0$ und $j \in \mathbb{N}_1$ gibt es eine Überdeckung von A_j durch Kugeln $B(a_n^j, r_n^j), n \in \mathbb{N}_1$ mit $\sum_n r_n^j \leq \varepsilon 2^{-j}$. Also liefert die Familie $\left(B(a_n^j, r_n^j)\right)_{(j,n) \in \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1}$ eine offene Überdeckung von $\bigcup_j A_j$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} r_n^j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-j} = \varepsilon \,.$$

Mit diesen Vorbetrachtungen zu Nullmengen können wir jetzt den Satz 28.10 beweisen:

Beweis: Für eine vorgegebene Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ sei $A \subset J$ die Menge der Punkte, in denen f nicht stetig ist. Mit $A_r := \{t \in J : \omega(f, t) \geq r\}$ gilt dann $A = \bigcup \{A_r : r > 0\} = \bigcup \{A_{2^{-n}} : n \in \mathbb{N}\}$. Jede der Mengen $A_r, r > 0$, ist abgeschlossen: Denn für $t_0 \notin A_r$ ist $\omega(f, t_0) < r$, es gibt also eine offene Umgebung $U \subset J$ von t_0 mit $\omega(f, U) < r$. Daher $U \subset J \backslash A_r$. Also ist $J \backslash A_r$ offen und A_r abgeschlossen.

Sei jetzt f Riemann-integrierbar. Es ist zu zeigen, dass dann die Ausnahmemenge A eine Nullmenge ist. Weil A abzählbare Vereinigung von Teilmengen der Form A_r ist (s.o.), muss nur gezeigt werden, dass jede solche Menge A_r eine Nullmenge ist. Sei also $r > 0$ fest und sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach 28.6.2° gibt es eine Zerlegung $Z = \{t_k\}$ von J mit

$$\omega(f, Z) < \frac{1}{2} r \varepsilon \,,$$

wobei hier $\omega(f,Z)=\sum_{k=1}^{m}\omega(f,]t_{k-1},t_k[)(t_k-t_{k-1})$ ist. Für $t\in A_r\cap\,]t_{k-1},t_k[$ ist dann nach Definition von A_r stets $\omega(f,]t_{k-1},t_k[)\geq\omega(f,t)\geq r$. Sei K' die Indexmenge $K'=\{k\in\mathbb{N}:1\leq k\leq m\,,\;A_r\cap\,]t_{k-1},t_k[\,\neq\emptyset\}$. Dann gilt

$$\frac{1}{2}r\varepsilon>\omega(f,Z)\geq\sum_{k\in K'}\omega(f,]t_{k-1},t_k[)(t_k-t_{k-1})\geq r\sum_{k\in K'}(t_k-t_{k-1})\,,$$

also

$$\sum_{k\in K'}(t_k-t_{k-1})<\frac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Daher hat $A_r\backslash Z$ eine Überdeckung von endlich vielen Intervallen ($]t_{k-1},t_k[\;,\;k\in K'$) mit der Summe der Intervalllängen kleiner als $\frac{1}{2}\varepsilon$: $\sum_{k\in K'}(t_k-t_{k-1})<\frac{1}{2}\varepsilon$. Zur endlichen Menge Z gibt es weitere endlich viele offene Intervalle in J mit einer Summe der Intervalllänge unterhalb $\frac{1}{2}\varepsilon$, die Z überdecken. Damit hat man endlich viele Intervalle gefunden, die A_r überdecken und für die die Summe der Intervalllängen kleiner als ε ist, und es ist nachgewiesen, dass A_r eine Nullmenge ist.

Sei jetzt umgekehrt A eine Nullmenge. Es soll gezeigt werden, dass f Riemann-integrierbar ist, indem die Bedingung in 28.6.1° verifiziert wird: Zu $\varepsilon>0$ gibt es $\delta>0$, so dass $\omega(f,Z)<\varepsilon$ gilt für alle Zerlegungen Z von J mit $\Delta(Z)<\delta$.

Sei also $\varepsilon>0$ vorgegeben. Mit A ist auch jede der Teilmengen $A_r\,,\,r>0$, von A eine Nullmenge. Insbesondere ist A_ε eine Nullmenge, und es gibt eine Überdeckung von A_ε von in J, die aus in J offenen Intervallen besteht, mit der Summe der Intervalllängen kleiner als ε. Da A_ε als abgeschlossene Teilmenge von J (s.o.) auch noch kompakt ist, überdecken endlich viele dieser Intervalle bereits A_ε. Wir können noch annehmen, dass die Intervalle disjunkt sind und wir schreiben sie $]a_i,b_i[=:J_i$ mit $b_i<a_{i+1}$, $i=1,2,\ldots,p$, (mit der gegebenenfalls nötigen Modifikation $J_1=[a_1,b_1[$ falls $a\in A_\varepsilon$ mit $a=a_1$ und analog $J_p=]a_p,b_p]$ mit $b=b_p$, falls $b\in A_\varepsilon$). Es gilt also insbesondere

$$\sum_{i=1}^{p}(b_i-a_i)<\varepsilon\,.$$

Das Komplement $K:=J\backslash\bigcup J_i$ der Vereinigung ist kompakt und Vereinigung der endlich vielen kompakten Intervalle $[b_i,a_{i+1}]$. Jeder Punkt $t\in K$ besitzt wegen $t\notin A_\varepsilon$ eine Umgebung V mit $\omega(f,V)<\varepsilon$: Man kann daher jedes Intervall $[b_i,a_{i+1}]\subset K$ in endlich viele Teilintervalle zerlegen durch $b_i=s_0^i<s_1^i<\ldots<s_{q^i}^i=a_{i+1}$, so dass jeweils $\omega(f,]s_{j-1}^i,s_j^i[)<\varepsilon$. Wir fassen alle diese s_j^i zusammen zu einer Zerlegung $Z(\varepsilon)=\{t_k\}$ und stellen fest:

$$\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=1}^{q^i}\omega(f,]s_{j-1}^i,s_j^i[)(s_j^i-s_{j-1}^i)<\varepsilon(b-a)$$

und mit $\|f\|=:M$

$$\sum_{i=1}^{p}\omega(f,J_i)(b_i-a_i)\leq M\sum_{i=1}^{p}(b_i-a_i)<M\varepsilon\,.$$

Zusammen ergibt sich

$$\omega(f,Z(\varepsilon))\leq\varepsilon(M+(b-a))$$

und damit $\omega(f,Z)\to0$ für $\Delta(Z)\to0$. ■

Die Frage, für welche Klassen von Integratoren μ welche Räume von Funktionen f RS-integrierbar sind, wollen wir in dem folgenden wichtigen Fall positiv beantworten.

(28.12) Satz: *Sei μ von beschränkter Variation. Dann sind alle stetigen $f:J\to E$ integrierbar bezüglich μ: Es gilt also $\mathcal{C}\subset\mathcal{R}(\mu)$.*

Ferner ist das Integral $I_\mu(f):=\int_a^b f\,d\mu$ stetig als lineare Abbildung

$$I_\mu:\mathcal{C}(J,E)\to E$$

und auf $\mathcal{R}(\mu) \cap \mathcal{B}$ *mit*

$$\|I_\mu(f)\| \leq (V_a^b \mu)\, \|f\|_\infty \ , \ f \in \mathcal{R}(\mu) \cap \mathcal{B} \, .$$

Insbesondere gilt $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}(\mu)$.

Zwei ganz verschiedene Beweise bieten sich an.
Beweis 1 im Sinne des vorangehenden Paragrafen: Durch

$$I_\mu(g) := S_\mu(g, Z, \tau) = \sum_{k=1}^{m} g_k(\mu(t_k) - \mu(t_{k-1}))$$

für eine Treppenfunktion $g \in \mathcal{T}$, Z Zerlegung zu g und $\tau \in Z_*$ wird eine lineare Abbildung $I_\mu : \mathcal{T} \to E$ definiert. Aus der Abschätzung

$$\|I_\mu(g)\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|g_k\|\, |\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})| \leq V_a^b \mu\, \|g\|_\infty$$

folgt die Stetigkeit von I_μ auf $\mathcal{T}$. I_μ hat nach den Sätzen des letzten Paragrafen eine eindeutig bestimmte Fortsetzung auf $\mathcal{S}$. Die Aussage folgt aus $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$. ∎

Beweis 2 mit dem Kriterium in 28.6.1°: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $\delta > 0$ mit $\|f(s) - f(t)\| < \varepsilon$ sobald nur $|s - t| < \delta$. Für jede Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(J)$ der Feinheit $\Delta(Z) < \delta$ gilt deshalb $\omega(f,]t_{k-1}, t_k[) \leq \varepsilon$ und es folgt

$$\omega_\mu(f, Z) = \sum_{k=1}^{m} \omega(f,]t_{k-1}, t_k[)\, |\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{m} |\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})| \leq \varepsilon V_a^b \mu \, .$$

Also $\omega_\mu(f, Z) \to 0$ für $\Delta(Z) \to 0$. Das bedeutet $f \in \mathcal{R}(\mu)$ nach 28.6.1°. Der Rest der Aussage wird wie zuvor gezeigt. ∎

Zu einer beliebigen monotonen Funktion μ existiert also immer das RS-Integral $f \mapsto \int_a^b f\, d\mu$ auf $\mathcal{S}$ und erst recht auf $\mathcal{C}$. Denn eine monotone Funktion μ hat eine totale Variation $V_a^b \mu \leq |\mu(b) - \mu(a)|$.

(28.13) Satz: Für stückweise stetig differenzierbare Integratoren $\mu : J \to \mathbb{R}$ gilt für stetige Funktionen $f : J \to E$:

$$\int_a^b f(t)\, d\mu = \int_a^b f(t) \dot{\mu}(t)\, dt \, .$$

Das folgt aus dem Mittelwertsatz 17.3 für differenzierbare reellwertige Funktionen.

Damit ist in dem wichtigen Fall eines differenzierbaren Integrators das RS-Integral zu μ zurückgeführt auf das bereits aus $\S\, 27$ bekannte Integral mit einem Gewichtsfaktor $\dot{\mu}$, den man als Dichtefunktion auffassen kann. [15.6.07]

(28.14) Satz: (Partielle Integration) *Im skalaren Fall* $E = \mathbb{R}$ *seien* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zwei Funktionen, die beide in* a *und in* b *stetig sind. Ist dann* $f \in \mathcal{R}(g)(J, \mathbb{R})$*, so ist umgekehrt* $g \in \mathcal{R}(f)(J, \mathbb{R})$ *und es gilt die bekannte Formel*

$$\int_a^b f\, dg + \int_a^b g\, df = fg|_a^b \, .$$

Beweis: Man beginnt mit einer Zerlegung $Z = \{t_k\}$ und einem Zwischenvektor $\tau \in Z_*$ und bildet $S_f(g, Z, \tau)$. Dann vertauscht man die Rollen von τ und t: Aus τ wird $t' = (a, \tau_1, \ldots, \tau_m, b)$ und aus t wird der Zwischenvektor $\tau' = (\tau'_1, t_1, \ldots, t_{m-1}, \tau'_{m+1})$. Man erhält $S_f(g, Z, \tau) = -S_g(f, Z', \tau') +$ Korrekturterm für $Z' = \{a, \tau_1, \ldots, \tau_m, b\}$. Im Grenzübergang $\Delta(Z) \to 0$ folgt die Behauptung.

Genauer:

$$S_f(g,Z,\tau)=\sum_{k=1}^{m} g(\tau_k)f(t_k)-\sum_{k=1}^{m} g(\tau_k)f(t_{k-1})\,.$$

Mit der Festlegung $t'_0=a$, $t'_k:=\tau_k$, $1\le k\le m$, $t'_{m+1}=b$ sowie $\tau'_{k+1}:=t_k$, $1\le k<m$, wird daraus

$$S_f(g,Z,\tau)=\sum_{k=1}^{m-1} g(t'_k)f(\tau'_{k+1})+g(t'_m)f(b)-\sum_{k=2}^{m} g(t'_k)f(\tau'_k)-g(t'_1)f(a)$$

und daher nach einer kleinen Indexverschiebung

$$S_f(g,Z,\tau)=\sum_{k=2}^{m} g(t'_{k-1})f(\tau'_k)-\sum_{k=2}^{m} g(t'_k)f(\tau'_k)+g(t'_m)f(b)-g(t'_1)f(a)\,,$$

also

$$S_f(g,Z,\tau)=-\sum_{k=2}^{m} f(\tau'_k)\big(g(t'_k)-g(t'_{k-1})\big)+f(b)g(t'_m)-f(a)g(t'_1)\,.$$

Mit einer beliebigen Wahl von $\tau'_1\in\,]a,\tau_1[\,=\,]t'_0,t'_1[$ und $\tau'_{m+1}\in\,]\tau_m,b[\,=\,]t'_m,t'_{m+1}[$ wird der Zwischenvektor komplettiert zu $\tau'\in Z'_*$ und ergibt die RS-Summe

$$S_g(f,Z',\tau')=\sum_{k=1}^{m+1} f(\tau'_k)\big(g(t'_k)-g(t'_{k-1})\big)\,,$$

also

$$S_g(f,Z',\tau')=\sum_{k=2}^{m} f(\tau'_k)\big(g(t'_k)-g(t'_{k-1})\big)+f(\tau'_1)\big(g(t'_1)-g(t'_0)\big)+f(\tau'_{m+1})\big(g(t'_{m+1})-g(t'_m)\big)\,.$$

Es folgt

$$S_f(g,Z,\tau)=-S_g(f,Z',\tau')+f(\tau'_1)(g(t'_1)-g(a))+f(\tau'_{m+1})(g(b)-g(t'_m)+f(b)g(t'_m)-f(a)g(t'_1)\,.$$

Schließlich konvergiert für $\Delta(Z)\to 0$ also $\Delta(Z')\to 0$

$$-S_g(f,Z',\tau')\ \text{ gegen }\ -\int_a^b f\,dg$$

nach Voraussetzung, und wegen $t'_1=\tau_1\to a$ und $t'_m=\tau_m\to b$ sowie $\tau'_1\to a$ und $\tau'_{m+1}\to b$ konvergiert

$$f(\tau'_1)(g(t'_1)-g(a))+f(\tau'_{m+1})(g(b)-g(t'_m)+g(t'_m)f(b)-g(t'_1)f(a)\ \text{ gegen }\ f(b)g(b)-f(a)g(a)\,,$$

denn f und g sind stetig in den Endpunkten a,b des Intervalls.

Insgesamt konvergiert daher $S_f(g,Z,\tau)$ gegen

$$-\int_a^b f\,dg+f(b)g(b)-f(a)g(a)\,.$$

Daher gilt $g\in\mathcal{R}(f)$, und es folgt

$$\int_a^b g\,df+\int_a^b f\,dg=f(b)g(b)-f(a)g(a)\,.$$

■

Für stückweise stetig differenzierbare f und g liefert 28.14 zusammen mit 28.12 die bekannte Formel für die partielle Integration (MIA):

$$\int_a^b f\dot g\,dt=fg|_a^b-\int_a^b \dot f g\,dt\,.$$

Der Zusammenhang zwischen Integration einerseits und stetigen linearen Abbildungen andererseits ist tiefgehend, wie das folgende Resultat zeigt, dass wir ohne Beweis zitieren:

(28.15) Satz: (Satz von Riesz) *Jedes stetige lineare Funktional $L : \mathcal{C} \to \mathbb{K}$ (also $L \in \mathcal{C}'$ für $\mathcal{C} = \mathcal{C}(J, E)$) ist von der Form $L = I_\mu$, wobei $I_\mu(f) = \int_a^b f\,d\mu$ für einen Integrator $\mu : J \to \mathbb{R}$ mit beschränkter Variation und es gilt $|||L||| = V_a^b \mu$.*

Im Geiste von $\S\,27$ ist jede solche stetige lineare Operation L also ein Integral.[6]

(28.16) Bemerkungen: Wir wollen zum Abschluss des Paragrafen zum Begriff des Riemann-Stieltjes-Integrals eine physikalisch orientierte Motivation erläutern.

1° **Schwerpunkt:** Der Schwerpunkt eines Systems S von n Massenpunkten, die sich auf der x-Achse mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ befinden, und die mit den jeweiligen Massen $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{R}$ belegt sind, ist bekanntlich

$$x_S := \frac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + \ldots + m_n}\,.$$

Die Bedeutung von x_S beruht darauf, dass man das n-punktige System S im Hinblick auf sein Verhalten unter der Wirkung der Schwerkraft durch den Massenpunkt in x_S mit der Gesamtmasse $M := m_1 + \ldots + m_n$ ersetzen darf.

Im Falle eines kontinuierlichen Systems S von Massenpunkten, die auf dem kompakten Intervall $J = [a, b]$ verteilt und mit Masse belegt sind, will man ebenfalls einen Schwerpunkt x_S mit der Gesamtmasse M des Systems definieren. Dazu wird man die Massenverteilung auf J in sinnvoller Weise durch eine Belegungsfunktion μ beschreiben. Diese ist auf einem Intervall $J' := [a', b]$ mit $a' < a$ definiert, so dass für $x \in J'$ der Wert $\mu(x)$ die im Intervall $[a', x]$ vorhandenen Masse bedeutet. Dann ist $\mu(a') = 0$ und $M := \mu(b)$ ist die Gesamtmasse. Ferner ist μ monoton wachsend und für $a' \le x_1 < x_2 \le b$ gibt die Differenz $\mu(x_2) - \mu(x_1)$ die in $]x_1, x_2]$ befindliche Masse an. Ist $Z = \{x_k\}$ eine Zerlegung von J' und τ eine Zwischenvektor, so wird durch die Riemann-Stieltjes-Summe

$$x(Z, \tau) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{m} \tau_k(\mu(x_k) - \mu(x_{k-1}))$$

eine Näherung des gesuchten Schwerpunkts gegeben. Es ist $x(Z, \tau) = S_\mu(f, Z, \tau)$ mit der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{M}\,x\,.$$

Der Grenzwert dieser Näherungen existiert für $\Delta(Z) \to 0$, da f stetig und μ von beschränkter Variation ist. Daher ist es gerechtfertigt, das RS-Integral

$$\int_{a'}^{b} f\,d\mu$$

als den Schwerpunkt anzusehen und zu definieren. Dieser existiert für jede Massenbelegung des Intervalls J.

[6]Das RS-Integral hat die folgende natürliche Verallgemeinerung. Statt skalarer Integratoren kann man auch Integratoren $\nu : J \to E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ oder gar $\nu : J \to \mathcal{L}(E, F)$ mit einem weiteren Banachraum F untersuchen. Die RS-Summen werden dann verallgemeinert zu $S_\nu(f, Z, \tau) = \sum(\nu(\tau_k) - \nu(\tau_{k-1}))(f(\tau_k))$. Unsere hier dargestellte RS-Integration ist in diesem allgemeineren Rahmen der Spezialfall $\nu : J \to \mathcal{L}(E, E)$ mit $\nu(t) = \mu(t)\mathrm{id}_E$ für den skalaren Integrator μ. Das Resultat des Satzes überträgt sich auf jeden Banachraum E, der isomorph zu einem Dualraum G', G Banachraum, ist.

Die Hinzunahme von $a' < a$ hat den einzigen Zweck, den Massenbeitrag im Punkte a zu berücksichtigen.

2° **Trägheitsmoment:** Betrachtet man das von S erzeugte Trägheitsmoment bei der Rotation von S um die y-Achse, so kommt man in analoger Weise auf RS-Summen der Form

$$S_\mu(f, Z, \tau) = \sum_{k=1}^{m} (\tau_k)^2 (\mu(x_k) - \mu(x_{k-1}) ,$$

mit der Funktion $f(x) = x^2$ als Integrator. Das entsprechende Trägheitsmoment von S ist also das RS-Integral

$$\int_{a'}^{b} f \, d\mu = \int_{a'}^{b} x^2 \, d\mu \, .$$

§29 Kurvenintegral, Wegintegral

Das Kurven- oder Wegintegral heißt auch Arbeitsintegral und lässt sich im Rahmen der Physik motivieren.

Ausgangspunkt ist das Gesetz

Arbeit = Kraft $\times$ *Weg*

oder in Formeln

$$A = K \times s$$

mit reellen Konstanten $K \geq 0$, $s > 0$.

Vektoriell geschrieben ist dieses Gesetz für einen Einheitsvektor $v \in R^n$ ($\|v\| = 1$ in der euklidischen Norm) mit $F = Kv$ und $y = sv$ dann nichts anderes als

$$A = \langle F, y \rangle \, .$$

Das ist so zu verstehen, dass die Kraft konstant in Richtung v weist und y die zurückgelegte Strecke in dieselbe Richtung beschreibt.

In Verallgemeinerung von $F = Kv$ definieren wir:

(29.1) Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein *Vektorfeld* auf Ω ist eine Abbildung $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

In der Regel verlangt man noch, dass F stetig ist, oder mehr (siehe nachfolgender Paragraf). Es gilt $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ mit Funktionen $F_j : \Omega \to \mathbb{R}$. F ist genau dann stetig, wenn alle F_j stetig sind.

Erste Beispiele:

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & Kv \, , \, x \in \mathbb{R}^n \\ F(x) & = & \lambda x \, , \, x \in \mathbb{R}^n \, , \\ F(x) & = & x^\perp \, , \, x \in \mathbb{R}^2 \, , \\ F(x) & = & -k \, \|x\|^{-n} x \, , \, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \, . \end{array}$$

Der konstante Fall noch einmal: Es sei $F(x) = w \in \mathbb{R}^n$ konstant und $\gamma(t) = x + tsv$ das Geradenstück von x nach $x + sv$. Die Arbeit A ist dann

$$A = \langle w, sv \rangle = \int_0^1 \langle w, sv \rangle \; dt = \int_0^1 \langle w, \dot\gamma \rangle \; dt \,,$$

wobei wie zuvor $\langle w, y \rangle = \sum_{j=1}^n w^j y^j$ das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ ist.

Analog für die Arbeit längs Polygonzügen γ, mit jeweils konstantem Vektorfeld $F = w_k$ auf den Geradenstücken:

$$A = \sum_{k=1}^m \langle w_k, (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \rangle \; .$$

Allgemein verstehen wir für $\gamma : J \to \mathbb{R}^n$, $Z = \{t_k\} \in \mathcal{Z}(J)$ und $\tau \in Z_*$ unter der Summe

$$A(F, \gamma, Z, \tau) := \sum_{k=1}^m \langle F(\gamma(\tau_k)), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \rangle$$

die *approximative Arbeit von F längs γ* bezüglich der Diskretisierung (Z, τ).

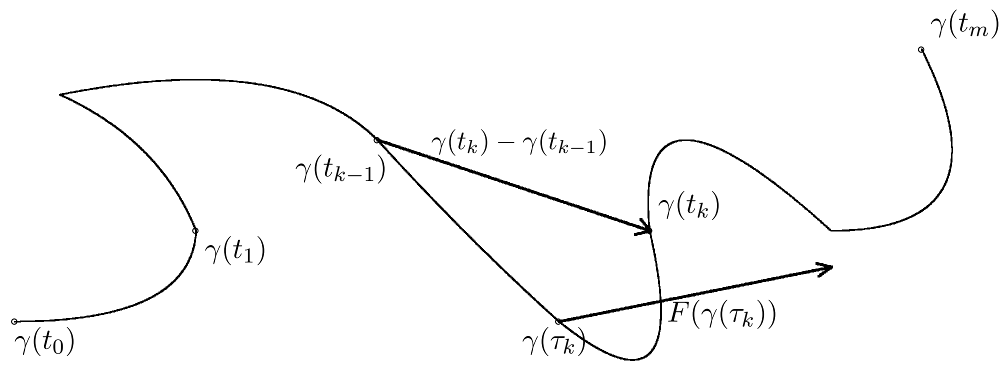

Abb.: Zum Ansatz $A(F, \gamma, Z, \tau)$: Der k-te Summand wird durch
das Skalarprodukt der beiden fett gezeichneten Vektoren gegeben.

(29.2) Definition: A ist das Kurvenintegral von F längs γ, wenn

$$A = \lim_{\Delta(Z) \to 0} A(F, \gamma, Z, \tau)$$

gilt. Das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall Z \in \mathcal{Z}(J) \; \forall \tau \in Z_* : \Delta(Z) < \delta \implies \|A - A(F, \gamma, Z, \tau)\| < \varepsilon \,.$$

Notation:

$$A = \int_\gamma F \, dx = \int_\gamma \langle F, dx \rangle = \int_\gamma \vec{F} \, d\vec{x} \,.$$

Die Konzepte und Resultate des vorangehenden Paragrafen zeigen:

(29.3) Satz: $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *sei stetig und* $\gamma : J = [a,b] \to \Omega$ *sei rektifizierbar. Dann existiert das Kurvenintegral* $\int_\gamma F\,dx$ *als Summe*

$$\sum_{j=1}^{n} \int_a^b F_j\,d\gamma^j$$

von Riemann-Stieltjes-Integralen.

Ist zusätzlich γ *auch noch stückweise stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_\gamma F\,dx = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle\;dt = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b F_j(\gamma(t))\dot\gamma^j(t)\,dt\,.$$

Man schreibt wegen $\int_\gamma F\,dx = \int_a^b \sum F_j\,d\gamma^j$ auch

$$\int_\gamma F\,dx = \int F_1\,dx^1 + \ldots + F_n\,dx^n$$

und bezeichnet den Ausdruck unter dem Integralzeichen als *1-Form*, *Differentialform vom Grad 1* oder *Pfaffsche Form*:

$$\omega = \omega_F = \sum F_j\,d\gamma^j\;.$$

(29.4) Beispiele: Die Kurvenintegrale längs der folgenden fünf ebenen Kurven

$$\begin{array}{lcll}
\alpha(t) & = & (1,t) & t \in [0,1] \\
\beta(t) & = & (t,1) & t \in [0,1] \\
\gamma(t) & = & (\cos t, \sin t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right] \\
\delta(t) & = & (\cos t, \sin t) & t \in \left[\frac{1}{2}\pi, 2\pi\right] \\
\rho(t) & = & r(\cos t, \sin t) & t \in [0, 2\pi m]
\end{array}$$

von den nachfolgenden Vektorfeldern werden berechnet:

1° $F(x,y) = (x,y)\,,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

α) $\int_\alpha F\,dx = \int_0^1 \langle F(\alpha(t), \dot\alpha(t))\rangle\;dt = \int_0^1 (1\cdot 0 + t\cdot 1)\,dt = \frac{1}{2}$.

β) Ebenso $\int_\beta F\,dx = \frac{1}{2}$.

γ) $\int_\gamma F\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos t(-\sin t) + \sin t\cos t)dt = 0$.

δ) Und auch $\int_\delta F\,dx = 0$, weil schon $\left\langle F\circ\delta, \dot\delta\right\rangle = 0$,

ρ) und dasselbe für ρ: $\int_\rho F\,dx = 0$.

Insbesondere $\int_\alpha F\,dx = \int_{\beta\oplus\gamma} F\,dx = \frac{1}{2}$, wie auch für alle anderen Kurven von $(1,0)$ nach $(1,1)$, die wir aus den vorhandenen fünf Kurven durch Zusammensetzen erhalten. [19.6.07]

2° $F(x,y) = (y,x)\,,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

α) $\int_\alpha F\,dx = \int_0^1 (t\cdot 0 + 1\cdot 1)\,dt = 1$.

β) Ebenso $\int_\beta F\,dx = 1$.

γ) $\int_\gamma F\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin t(-\sin t) + \cos t\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t) = 0$.

δ) Daher auch $\int_\delta F\,dx = 0$,

ρ) und genauso $\int_\rho F\,dx = 0$.

Wieder gilt für alle Kurven, die $(1,0)$ und $(1,1)$ miteinander verbinden und die wir aus den vorhandenen fünf Kurven durch Zusammensetzen erhalten, dass die Integralwerte der Kurvenintegrale identisch sind.

3° $F(x,y) = (-y,x) = (x,y)^\perp$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

α) $\int_\alpha F\,dx = \int_0^1 (-t\cdot 0 + 1\cdot 1)\,dt = 1$.

β) $\int_\beta F\,dx = \int_0^1 (-1\cdot 1 + t\cdot 0)\,dt = -1$.

γ) $\int_\gamma F\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-\sin t\cdot(-\sin t) + \cos t\cos t)dt = \frac{1}{2}\pi$.

δ) $\int_\delta F\,dx = \frac{3}{2}\pi$,

ρ) $\int_\rho F\,dx = 2\pi m r$.

Die in den vorgehenden beiden Beispielen herausgestrichene Eigenschaft ist hier verletzt. Verschiedene Kurven, die $(1,0)$ und $(1,1)$ miteinander verbinden, ergeben auch verschiedene Kurvenintegrale. F ist nicht kurvenunabhängig integrierbar.

4° $F(x,y) = -k\frac{(x,y)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0\}$.

α) $\int_\alpha F\,dx = -k\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2}k\log 2$.

β) $\int_\beta F\,dx = -k\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{2}k\log 2$.

γ) Es gilt

$$\langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle = \frac{\cos t(-\sin t) + (\cos t\sin t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 0\,,$$

daher $\int_\gamma F\,dx = 0$, und entsprechend

δ) $\int_\delta F\,dx = 0$, und

ρ) $\int_\rho F\,dx = 0$.

Auch hier liefern die Kurvenintegrale längs Kurven, die Zusammensetzungen von den fünf Kurven sind und die die Punkte $(0,1)$ und $(1,1)$ verbinden, alle denselben Wert $-\frac{1}{2}k\log 2$.

5° $F(x,y) = \frac{(-y,x)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0\}$.

α) $\int_\alpha F\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{4}\pi$.

β) $\int_\beta F\,dx = \int_0^1 \frac{-1}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{4}\pi$.

γ) Es gilt

$$\langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle = \frac{-\sin t(-\sin t) + (\cos t\cos t)}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1\,,$$

daher $\int_\gamma F\,dx = \frac{1}{2}\pi$, und entsprechend

δ) $\int_\delta F\,dx = \frac{2}{3}\pi$, sowie

ρ) $\int_\rho F\,dx = \int_0^{2\pi m} r\,dt = 2\pi m r$.

Es treten auch hier für verschiedene Kurven, die $(1,0)$ und $(1,1)$ miteinander verbinden, verschiedene Werte der Kurvenintegrale auf, $F\,dx$ ist nicht kurvenunabhängig integrierbar. Man beachte allerdings

$$\int_\alpha F\,dx = \int_{\beta\otimes\gamma} F\,dx\,.$$

(29.5) Regeln: *Für stetige Vektorfelder $F, G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und für eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : J \to \Omega$ in Ω, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt:*

1° *Linearität:*

$$\int_\gamma (F + \lambda G)\,dx = \int_\gamma F\,dx + \lambda \int_\gamma G\,dx\,.$$

2° *Stetigkeit:*

$$\left|\int_\gamma F\,dx\right| \le L(\gamma)\,\|F\|_{\gamma^*}\ ,$$

wobei $\|F\|_{\gamma^*} = \sup\{\|F(\gamma(t))\| : t \in J\} = \sup\{\|F(x)\| : x \in \gamma^*\}\,.$

3° *Substitution für den positiv orientierten Fall: Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b] = J$ stetig differenzierbar mit $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, so gilt*

$$\int_\gamma F\,dx = \int_{\gamma\circ\varphi} F\,dx\,.$$

4° *Substitution für den Fall der Orientierungsänderung: Ist $\varphi : [c,d] \to [a,b] = J$ stetig differenzierbar mit $\varphi(d) = a$ und $\varphi(c) = b$, so gilt*

$$\int_\gamma F\,dx = -\int_{\gamma\circ\varphi} F\,dx\,.$$

5° *Für eine weitere rektifizierbare Kurve $\alpha : [c,d] \to \Omega$ mit $\alpha(c) = \gamma(b)$ ist*

$$\int_{\alpha\oplus\gamma} F\,dx = \int_\gamma F\,dx + \int_\alpha F\,dx\,,$$

wobei im Falle $c = b$ die Kurve $\alpha \oplus \gamma : [a,d] \to \Omega$ durch

$$(\alpha\oplus\gamma)(t) := \begin{cases} \gamma(t), & \text{wenn } t \in [a,b] \text{ und} \\ \alpha(t), & \text{wenn } t \in [c,d] \end{cases}$$

gegeben ist und im allgemeinen analog auf $[a, d+b-c]$ durch

$$(\alpha\oplus\gamma)(t) := \begin{cases} \gamma(t), & \text{wenn } t \in [a,b] \text{ und} \\ \alpha(t-b+c), & \text{wenn } t \in [b, d+b-c] \end{cases}$$

(29.6) Bemerkung: Das Konzept des Kurvenintegrals gibt auch Sinn für Hilberträume H über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ anstelle von $\mathbb{R}^n$ und allgemeiner für Banachräume E.

Für einen Hilbertraum H mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und für eine offene Teilmenge $\Omega \subset H$ erhält man zu $F : \Omega \to H$ und zu Kurven γ in Ω das Kurvenintegral $\int_\gamma F\,dx$ wie zuvor als Grenzwert von Summen $A(F, \gamma, Z, \tau)$ mit der Beschreibung

$$\int_\gamma F\,dx = \int_a^b \langle F\circ\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle\ dt$$

für stetige F und stückweise stetig differenzierbare γ. In dieser Situation wirkt $F\circ\gamma(t)$ als Linearform auf H, und das ist verallgemeinerungsfähig.

Im Falle eines Banachraumes E muss das Feld Werte im Dual E' haben: Ist $F : \Omega \to E'$ stetig auf der offenen Teilmenge $\Omega \subset E$ und $\gamma : J \to \Omega$ stückweise stetig differenzierbar, so setzt man

$$\int_\gamma F\,dx = \int_a^b F(\gamma(t))(\dot\gamma(t))\,dt\,.$$

Hier wird einmal mehr deutlich, dass F eine Linearform ist, und $F\,dx$ ist die Differentialform dazu. Diese Eigenschaft wird speziell in $H = \mathbb{R}^n$ und in allgemeinen Hilberträumen H verdeckt, weil in diesen Räumen durch das Skalarprodukt automatisch eine Identifizierung zwischen Dualraum H' und H stattfindet: Jedes Element $z \in H$ liefert die stetige Linearform $x \mapsto \langle z, x\rangle$ auf H und alle stetigen Linearformen haben eine solche Darstellung. Das ist im endlichdimensionalen Fall ganz offensichtlich und im unendlichen Fall ein weiterer Satz von Riesz.

Man mache sich klar, dass die Identifizierung $H' \cong H$ von dem Skalarprodukt abhängt, und insofern nicht kanonisch durch die Vektorraumstruktur allein gegeben ist.

§30 Konservative Vektorfelder und partielle Ableitung

Im folgenden soll Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$ sein, also eine offene Menge, die auch noch kurvenzusammenhängend ist.

(30.1) Definition: Ein topologischer Raum X heißt *kurvenzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte $x, y \in X$ durch eine Kurve verbunden werden können, das heißt, dass es stets eine Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \to X$ (also eine stetige Abbildung γ) mit $\gamma(t_0) = x$ und $\gamma(t_1) = y$ gibt.

Aus den Übungen wissen wir, dass eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ genau dann ein Gebiet (also kurvenzusammenhängend) ist, wenn je zwei Punkte aus Ω durch einen Polygonzug verbunden werden können, der ganz in Ω verläuft. Insbesondere folgt, dass sich je zwei Punkte in einem Gebiet Ω des $\mathbb{R}^n$ durch stückweise stetig differenzierbare Kurven in Ω verbinden lassen.[7]

Die Gebiete in $\mathbb{R}$ sind genau die offenen Intervalle (beschränkt oder unbeschränkt). Im $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, gibt es keine so einfache Beschreibung für die Gebiete; bereits der Fall $n = 2$ ist enorm involviert.

(30.2) Satz: *Jede konvexe offene Teilmenge Ω eines normierten Raumes ist kurvenzusammenhängend.*

Denn Ω erfüllt definitionsgemäß für je zwei $x, y \in \Omega$ die Bedingung, dass das ganze Geradenstück zwischen x und y in Ω liegt, das heißt, dass für $t \in [0,1]$ stets $x + t(y - x) \in \Omega$ gilt. Also liefert die Gerade $t \mapsto x + t(y - x)$ eine Verbindung von x nach y in Ω.

Insbesondere sind die offenen Kugeln $B(x, r)$ eines normierten Raumes als konvexe Mengen immer auch kurvenzusammenhängend. Daher gilt für jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$, dass *lokal* immer ein Kurvenzusammenhang vorliegt: Zu jedem $x \in U$ gibt es eine offene Umgebung W, $W \subset U$, die kurvenzusammenhängend ist, nämlich $W = B(x, r)$ mit $r > 0$ klein genug.

[7] Es gibt noch einen weiteren Zusammenhangsbegriff, den wir aus den Übungen kennen, und der zum Schluss des Paragrafen in 30.20 behandelt wird.

Man beachte, dass in allgemeinen metrischen Räumen die Kugeln $B(x,r)$ nicht immer zusammenhängend sind, wie z.B. bei $X = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ in der Relativtopologie mit der induzierten Metrik: Keine Kugel $B(0,r) \subset X$, $r > 0$, der relativen Metrik auf X ist kurvenzusammenhängend.

Dagegen sind die Kugeln $B(x,r) \subset E$ in einem normierten Raum E immer kurvenzusammenhängend, weil konvex.

(30.3) Definition: Eine Teilmenge B eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes V heißt *sternförmig* (*in Bezug auf* $z \in B$ und z heißt dann ein *Zentrum* von B), wenn für jeden Punkt $x \in B$ das Geradenstück zwischen z und x ganz in B liegt, also $\forall\, t \in [0,1] : z + t(x-z) \in B$.

Offensichtlich sind auch die sternförmigen Teilmengen eines normierten Raumes kurvenzusammenhängend. Jede konvexe Teilmenge eines normierten Raumes ist sternförmig in Bezug auf jeden Punkt als Zentrum (und das charakterisiert die konvexen Mengen).

Ein Beispiel eines sternförmigen Gebietes im $\mathbb{R}^2$, das nicht konvex ist, ist die so genannte *geschlitzte Ebene*, das ist die Menge

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \Longrightarrow x > t_0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\} \cup \{(x,0) : x > t_0\}$$

mit einem festen Wert $t_0 \in \mathbb{R}$, z.B. $t_0 = 0$. Zentrum ist hier jedes $z = (t_0 + \varepsilon, 0)$ mit $\varepsilon > 0$.

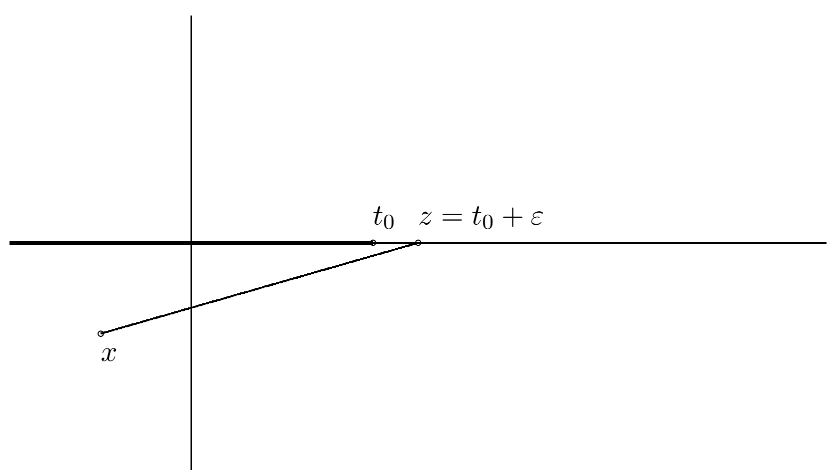

Abb.: Die geschlitzte Ebene. Der „Schlitz“ ist der fett gezeichnete Strahl.
Jeder Punkt x der geschlitzten Ebene hat eine gerade Verbindung mit dem Zentrum $z = t_0 + \varepsilon$.

Etwas allgemeiner: Sei $v \in \mathbb{R}^2$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $v \neq 0$. Dann ist auch $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \{tv : t \leq t_0\}$ eine geschlitzte Ebene. Sie ist sternförmig mit Zentrum $(t_0 + 1)v$.

Notationen:

Für das Gebiet Ω und Punkte $x_0, x_1 \in \Omega$ sei $\mathcal{K}(x_0, x_1, \Omega) = \mathcal{K}(x_0, x_1)$ die Menge aller stückweise stetig differenzierbaren Kurven, die x_0 und x_1 verbinden mit x_0 als Anfangspunkt und x_1 als Endpunkt. Ein typisches kompaktes Intervall hat im Folgenden die Notation $I = [t_0, t_1]$.

(30.4) Definition: Ein stetiges Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt *konservativ*, wenn F kurvenunabhängig integrierbar ist, das heißt, wenn für je zwei Punkte $x_0, x_1 \in \Omega$ und je zwei $\gamma, \alpha \in \mathcal{K}(x_0, x_1)$ die Kurvenintegrale übereinstimmen:

$$\int_\gamma F\,dx = \int_\alpha F\,dx\,.$$

Wenn also die Kurven γ und α beide auf dem Intervall $I = [t_0, t_1]$ definiert sind (das kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, weil wir die Substitutionsregel 29.5.3° haben), so ist $\gamma(t_i) = x_i = \alpha(t_i)$, $i = 1, 2$, und es gilt

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n F_j(\gamma(t))\dot{\gamma}^j(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n F_j(\alpha(t))\dot{\alpha}^j(t)\,dt\,.$$

(30.5) Lemma: *Ein stetiges Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann konservativ, wenn für alle $x \in \Omega$ und alle $\gamma \in \mathcal{K}(x, x, \Omega)$ gilt:*

$$\int_\gamma F\,dx = 0\,.$$

Eine Kurve γ auf $I = [t_0, t_1]$ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$, wenn also Anfangs- und Endpunkt der Kurve übereinstimmen. $\mathcal{K}(x, x, \Omega)$ ist die Menge der geschlossenen und stückweise stetige differenzierbaren Kurven in Ω mit Anfangs- und Endpunkt $x \in \Omega$. [22.06.07]

Ein stetiges Vektorfeld F auf Ω ist also genau dann konservativ, wenn das Kurvenintegral von F längs aller geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Kurven in Ω verschwindet.

(30.6) Beispiele: Die Beispiele 29.4.1°,2°,4° sind konservativ, wie wir gleich zeigen können. Die Beispiele 29.4.3° und 5° sind offensichtlich nicht konservativ, weil nicht kurvenunabhängig integrierbar.

(30.7) Satz: *Jedes Zentralfeld ist konservativ.*

Ein *Zentralfeld* F ist ein Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ auf $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : r < \|x\| < R\}$ mit $0 \le r < R \le \infty$ von der Form

$$F(x) = \phi(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}\,,\; x \in \Omega\,,$$

wobei $\phi :]r, R[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Die zugehörige Differentialform ist

$$\omega = F\,dx = \frac{\phi(\|x\|)}{\|x\|}\sum_{j=1}^n x^j\,dx^j\,.$$

(30.8) Beobachtung: Sei F ein konservatives Vektorfeld F auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, in dem ein Punkt $x_0 \in \Omega$ ausgezeichnet werde. Dann ist für jeden weiteren Punkt $x \in \Omega$ und $\gamma_x \in \mathcal{K}(x_0, x, \Omega)$ die Größe

$$U(x) := \int_{\gamma_x} F\,dy = \int_{\gamma_x} \omega$$

wohldefiniert, weil sie unabhängig von der speziellen Wahl von γ_x ist.

Die Funktion $U : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *Potential* von F, oder *Potentialfunktion*.

Wichtig ist die folgende Formel für $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| \neq 0$, $h \in \mathbb{R}, h \neq 0, |h|$ klein,

$$\frac{U(x+hv)-U(x)}{h} = \int_0^1 \langle F(x+thv), v\rangle \; dt\,,$$

mit der sich das nachfolgende Lemma beweisen lässt.

(30.9) Lemma: U ist stetig und es gilt für $v \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{d}{dt}U(x+tv)|_{t=0} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{U(x+hv)-U(x)}{h} = \langle F(x), v\rangle \ .$$

Dieses Resultat gibt Anlass zu der folgenden fundamentalen Definition:

(30.10) Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. u heißt

1° *im Punkte $a \in \Omega$ in j-Richtung partiell differenzierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{u(a+he_j)-u(a)}{h} \in \mathbb{R}$$

existiert (e_j ist dabei der Einheitsvektor mit den Komponenten δ_j^k , $k = 1, 2, \ldots, n$). Dieser Grenzwert ist dann die *partielle Ableitung in j-Richtung im Punkte a* und wird u.a. mit

$$\frac{\partial u}{\partial x^j}(a) = \frac{\partial}{\partial x^j}u|_{x=a} = u_{x^j}(a) = u,_j(a) = D_j u(a) = \partial_j u(a)$$

bezeichnet. Es gilt

$$u_{x^j}(a) = \frac{d}{dt}u(a+te_j)|_{t=0}\,.$$

Analog in Richtung $v \in R^n$, $v \neq 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial v}(a) = \frac{d}{dh}u(a+hv)|_{h=0}\,.$$

2° *im Punkte $a \in \Omega$ partiell differenzierbar*, wenn alle $\frac{\partial u}{\partial x^j}(a)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ existieren. In diesem Falle ist

$$\nabla u(a) := \operatorname{grad} u(a) := (\frac{\partial u}{\partial x^1}(a), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x^n}(a))$$

der *Gradient von u in a*.

3° *partiell differenzierbar in Ω*, wenn u in allen Punkten $a \in \Omega$ partiell differenzierbar ist. In diesem Falle heißt $\nabla u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ das *Gradientenfeld* zu u.

4° *stetig partiell differenzierbar*, wenn u partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen $u_{x^j} : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig sind. In diesem Fall ist ∇u ein stetiges Vektorfeld auf Ω.

(30.11) Kettenregel: $u : \Omega \to \mathbb{R}$ sei stetig partiell differenzierbar und $\gamma : [t_0, t_1] \to \Omega$ sei differenzierbar. Dann ist die Komposition $u \circ \gamma$ differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dt}(u\circ\gamma)(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x^j}(\gamma(t))\frac{d\gamma^j}{dt}(t)\,.$$

Kurz

$$\frac{d}{dt}(u\circ\gamma)(t) = \langle \nabla u(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \ .$$

Ferner
$$\frac{\partial}{\partial x^j} u(a+tx) = \frac{\partial u}{\partial x^j}(a+tx)\cdot t\,.$$

Der Beweis der ersten Formel wird im kommenden Kapitel nachgeholt im Rahmen der Kettenregel für differenzierbare Abbildungen in mehreren Veränderlichen. Die zweite Formel ist ganz leicht nachzuprüfen. Dabei ist die linke Seite der Gleichung zu verstehen als die partielle Ableitung der Funktion $x \mapsto u(a+tx)$ während $\frac{\partial u}{\partial x^j}(a+tx)$ für die partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x^j}$ steht, in die $a+tx$ eingesetzt worden ist:
$$\frac{\partial u}{\partial x^j}(a+tx) = \frac{\partial u}{\partial x^j}(y)|_{y=a+tx}\,.$$

Beweis:
$$\frac{\partial}{\partial x^j} u(a+tx) = \lim_{h\to 0}\frac{u(a+t(x+he_j)) - u(a+tx)}{h} = \lim_{h\to 0} t\frac{u(a+tx+the_j) - u(a+tx)}{th}\,,$$
also
$$\frac{\partial}{\partial x^j} u(a+tx) = \lim_{k\to 0} t\frac{u(a+tx+ke_j) - u(a+tx)}{k} = t\frac{\partial u}{\partial x^j}(a+tx)\,.$$
■

(30.12) Satz: *Ein stetiges Vektorfeld F auf dem Gebiet Ω ist genau dann konservativ, wenn es eine partiell differenzierbare Funktion U auf Ω gibt mit $F = \nabla U$. (U ist dann stetig partiell differenzierbar.)*

In der Notation als Differentialform: $\omega = \omega_F = F\,dx$ ist genau dann kurvenunabhängig integrierbar, wenn es U mit $dU = \omega$ gibt, wobei
$$dU := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x^j}\,dx^j$$
das *totale Differential* von U ist. (Solche Differentialformen ω, die von der Form dU sind, heißen auch *exakte Differentialformen*.)

(30.13) Bemerkungen und Beispiele:

1° U ist eindeutig bis auf eine Konstante.

2° Der Fall $n = 1$: Ein Gebiet Ω ist ein offenes Intervall. Ein stetiges Vektorfeld auf Ω ist eine stetige Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}$. Sei $\gamma : [t_0, t_1] \to \Omega$ differenzierbar. Dann ist das Wegintegral
$$\int_\gamma F\,dx = \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt\,.$$
Sei H eine Stammfunktion von F, dann ist $\int_\gamma F\,dx = H(\gamma(t_1)) - H(\gamma(t_0))$, weil $H\circ\gamma$ Stammfunktion von $F(\gamma(t))\dot\gamma(t)$ ist.

Also ist jedes stetige Vektorfeld im Eindimensionalen bereits konservativ wegen des Hauptsatzes.

Der Satz 30.12 ist daher als eine Verallgemeinerung das Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung einzustufen.

3° Spezielle Beispiele:

$U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ist Potential von $F(x, y) = (x, y)$.

$U = xy$ ist Potential von $F(x, y) = (y, x)$.

$U = \log \|x\|$ ist Potential von $F(x,y) = x\|x\|^{-2}$.

$U = (n-2)^{-1}k\,\|x\|^{2-n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ ist Potential von $F(x) = -kx\|x\|^{-n}$.

4° Für ein Zentralfeld $F(x) = \phi(\|x\|)\frac{x}{\|x\|}$ ist $U(x) = \int_{s_0}^{\|x\|}\phi(s)ds$, $r < \|x\| < R$, ein Potential ($r < s_0 < R$).

5° Das Potential legt die „Äquipotentialflächen" $\Sigma_c := \{x \in \Omega : U(x) = c\} = U^{-1}(c)$ fest. Das Vektorfeld F steht senkrecht auf den Äquipotentialflächen in folgenden Sinne: Ist γ eine stetig differenzierbar Kurve, die ganz in Σ_c verläuft, so ist $\langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle = 0$. [26.06.07]

(30.14) Beobachtung: Ist F ein konservatives stetiges Vektorfeld, dessen Komponenten F_j alle stetig partiell differenzierbar sind, so ist die folgende *Integrabilitätsbedingung*

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial F_j}{\partial x^k} = \frac{\partial F_k}{\partial x^j}$$

erfüllt.

Diese Bedingung wird auch mit

$$\operatorname{rot} F = 0$$

bezeichnet, oder es wird gesagt, die Form $\omega = F\,dx$ sei *geschlossen.*:

$$d\omega = 0\,.$$

Die Bedingung folgt unmittelbar aus dem folgenden Resultat, das wir erst im Kapitel X beweisen werden:

(30.15) Satz von Schwarz: *Für jede zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *auf einer offenen Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial u}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial u}{\partial x^j}$$

für alle $j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Zum Beispiel gilt für $F(x^1, x^2) = (x^2, x^1) = (F_1(x^1, x^2), F_2(x^1, x^2))$, also unser Beispiel 29.4.2°:

$$\frac{\partial}{\partial x^2}F_1 = 1 = \frac{\partial}{\partial x^1}F_2\,.$$

Und für $F(x^1, x^2) = (-x^2, x^1) = (F_1(x^1, x^2), F_2(x^1, x^2))$ (Beispiel 29.4.3°):

$$\frac{\partial}{\partial x^2}F_1 = -1 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x^1}F_2\,.$$

Die Integrabilitätsbedingung ist für stetige Vektorfelder $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, deren Komponenten stetig partiell differenzierbar sind, eine **notwendige Bedingung** dafür, dass F konservativ ist. Im Falle von besonderen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist die Bedingung auch **hinreichend**, wie der folgende Satz zeigt.

(30.16) Satz: (Lemma von Poincaré) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein sternförmiges Gebiet. Dann ist jedes stetige Vektorfeld* F *auf* Ω *konservativ, das der Integrabilitätsbedingung* (I) *genügt*.

In der Formulierung mit Differentialformen: Auf einem sternförmigen Gebiet ist jede stetig differenzierbare geschlossene 1-Form exakt.

(30.17) Beispiel: Das zuvor schon diskutierte Beispiel 29.4.5°

$$F(x,y) = \frac{(-y,x)}{(x^2+y^2)}\,,\ (x,y) \neq 0\,,$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung (I), ist aber nicht konservativ.

Achtung: Die Eigenschaft eines Vektorfeldes F, konservativ zu sein, ist also nicht nur durch die Vorgabe von F sondern auch durch das jeweilige Gebiet festgelegt, es ist also teilweise eine topologische Eigenschaft. Insbesondere ist das Feld F im Beispiel 30.17 nach 29.4.5° nicht konservativ auf $\Omega = \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. Für sternförmige $\Omega' \subset \Omega$, zum Beispiel für die geschlitzte Ebene $\Omega_v = \mathbb{R}^2\backslash\{tv : t \geq 0\}$, $v \neq 0$, gilt dagegen wegen 30.16 und 30.17: $F|_{\Omega'} : \Omega' \to \mathbb{R}^2$ ist konservativ und hat dort ein Potential.

Wenn ein stetiges Vektorfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig partiell differenzierbare Komponenten F_j hat und der Integrabilitätsbedingung (I) genügt, dann ist F nicht unbedingt konservativ (vgl. 30.17), aber F ist wegen 30.16 *lokal konservativ*, das bedeutet, dass es zu jedem Punkt $a \in \Omega$ eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ gibt, so dass $F|_U$ konservativ ist: Man nehme $r > 0$ klein genug, so dass $U := B(a,r) \subset \Omega$ gilt, dann bleibt die Integrabilitätsbedingung für $G = F|_U$ erhalten und U ist konvex, also sternförmiges Gebiet.

Zum Beweise des Lemmas von Poincaré 30.16 brauchen wir neben der Kettenregel 30.11 vor allem noch das folgende Resultat, das auch erst im kommenden Kapitel X bewiesen wird (vgl. 35.7).

(30.18) Hilfssatz: (Ableitung eines Parameterintegrals) *Es sei* $g : [0,1] \times]a,b[\to \mathbb{R}$ *stetig und für jedes* $t \in [0,1]$ *sei* $x \mapsto g(t,x)$ *differenzierbar mit Ableitung*

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\,.$$

Es sei zudem noch

$$\frac{\partial g}{\partial x} : [0,1] \times]a,b[\to \mathbb{R}$$

stetig. Dann ist die Funktion (Parameterintegral)

$$x \mapsto \int_0^1 g(t,x)\,dt$$

in $]a,b[$ *differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^1 g(t,x)\,dt\right) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\,dt\,.$$

Wegen der letzten Formel spricht man auch von der "´Differentiation unter dem Integralzeichen“.

(30.19) Komplexe Version des Kurvenintegrals und Funktionentheorie: [8]

1° Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ und eine stetige Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{C}$ betrachtet man auch das *komplexe Kurvenintegral*. Dabei wird in der Integraldefiniton das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch die komplexe Multiplikation $\cdot : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ersetzt. Für stückweise stetig differenzierbare Kurven $\gamma : [a,b] \to \Omega$ bedeutet das

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt\,.$$

[8] nicht vorgetragen

2° Vergleich mit dem bisher behandelten Begriff des Kurvenintegrals: Für $f = u + iv$ und $\gamma = \alpha + i\beta$ (mit reellwertigen u, v, α, β) ergibt sich

$$f \cdot \dot{\gamma} = (u + iv)(\dot{\alpha} + i\dot{\beta}) = (u\dot{\alpha} - v\dot{\beta}) + i(u\dot{\beta} + v\dot{\alpha}) .$$

Das komplexe Kurvenintegral lässt sich demzufolge durch die Summe von zwei reelen Kurvenintegralen der bisherigen Art darstellen. Seien $P := (u, -v)$ und $Q := (v, u)$, dann

$$\int_\gamma f\,dz = \int_\gamma P\,dx + i \int_\gamma Q\,dx .$$

3° Im Spezialfall $f(z) = z^{-1}$, $z \neq 0$, erhält man

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_a^b \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\,dt = \int_a^b \frac{(\dot{\alpha} + i\dot{\beta})(\alpha - i\beta)}{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)}\,dt = \int_\gamma \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}\,d(x, y) + i \int_\gamma \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}\,d(x, y) .$$

Das komplexe Kurvenintegral $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ zerlegt sich also in zwei Kurvenintegrale, die in diesem Kapitel bereits mehrfach behandelt worden sind.

4° Die Integrabilitätsbedingungen an P und an Q bedeuten

$$u_y = -v_x \, , \, u_x = v_y \, .$$

Das sind die so genannten *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen* der Funktionentheorie. (Die *Funktionentheorie* ist die Theorie der holomorphen Funktionen). Eine komplexe Funktion $f = u + iv$ erfüllt diese Gleichungen genau dann, wenn sie im folgenden Sinn komplex differenzierbar ist: In allen $z \in \Omega$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0, h \neq 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} =: f'(z) \, ,$$

und ist gleich $u_x + iv_x$.

5° Wenn die Integrabilitätsbedingungen für P und Q erfüllt sind (also die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen), und diese partiellen Ableitungen alle stetig sind, so gibt es nach dem Lemma von Poincaré 30.16 im Kleinen (z.B. in offenen Kreisscheiben $B(z, r) \subset \Omega$) Potentiale U und V mit $\nabla U = (U_x, U_y) = (u, -v)$ und $\nabla V = (V_x, V_y) = (v, u)$. Setze $F := U + iV$. Dann ist auch F komplex differenzierbar in $B(z, r)$ mit $F' = u + iv = f$. F ist also eine (lokale) Stammfunktion von f bezüglich der komplexen Differentiation. Im Ergebnis hat man die folgende Äquivalenz für eine stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$:

i) f ist komplex differenzierbar in $\Omega \subset \mathbb{C}$.

ii) f ist lokal kurvenunabhängig integrierbar. (Zu jedem $z \in \Omega$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \Omega$, so dass $f|_W$ kurvenunabhängig integrierbar ist bezüglich des komplexen Kurvenintegrals.)

iii) f hat lokal Stammfunktionen. (Zu jedem $z \in \Omega$ gibt es eine offene Umgebung $W \subset \Omega$ und eine komplex differenzierbare Funktion $F : W \to \mathbb{C}$ mit $F' = f|_W$.)

6° Eine Funktion, die eine der Bedingungen in 5° i) – 5° iii) und damit alle erfüllt, heißt *holomorphe Funktion*. Zum Beweis der Äquivalenz: i) $\Longrightarrow$ iii) folgt direkt aus dem Lemma von Poincaré – zumindestens für den Fall, dass f' stetig ist – wie gerade gezeigt. Und ii) $\Longleftrightarrow$ iii) ist die Charakterisierung 30.12 der konservativen Vektorfelder unter Berücksichtigung von 30.19.2°. Die Implikation iii) $\Longrightarrow$ i) ist ein Kernstück der Funktionentheorie und folgt dadurch, dass die folgende überraschende Aussage nachgewiesen wird:

7° Jede komplex differenzierbare Funktion ist bereits beliebig oft komplex differenzierbar und kann sogar lokal in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden.

(30.20) Zusammenhang:[9]

1° Ein metrischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

2° Ein kurvenzusammenhängender metrischer Raum ist zusammenhängend.

3° Die Umkehrung dieser Aussage ist nicht allgemein richtig, sie stimmt aber für lokal kurvenzusammenhängende Räume. Dabei heißt X lokal kurvenzusammenhängend, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ von x gibt, die kurvenzusammenhängend ist.

Beweis von 3°: Sei X zusammenhängend und lokal kurvenzusammenhängend. Wähle $a \in X$ und setzt $Z := \{z \in X \mid \exists \alpha : [0,1] \to X \text{ stetig }, \alpha(0) = a\,, \alpha(1) = x\}$. Es genügt $Z = X$ zu zeigen. Es ist $Z \neq \emptyset$, da $a \in Z$. Z ist abgeschlossen, denn für $x \in \overline{Z}$ gibt es eine kurvenzusammenhängende Umgebung U und es ist $U \cap Z \neq \emptyset$. Für $z \in U \cap Z$ gibt es eine Kurve, die a und z (in X) verbindet und auch eine Kurve, die z und x (in $U \subset X$) verbindet. Die Zusammensetzung dieser beiden Kurven verbindet a und x, also ist $x \in Z$, das heißt Z ist abgeschlossen. Außerdem ist Z auch offen. Denn zu $z \in Z$ gibt es eine kurvenzusammenhängende Umgebung U von z, und wie zuvor lässt sich jeder Punkt $x \in U$ über z mit a durch eine Kurve in X verbinden, das heißt $U \subset Z$ und Z ist offen. Da X zusammenhängend ist, ist die nichtleere Menge Z der ganze Raum, da nachgewiesen wurde, dass Z offen und abgeschlossen ist. ∎

4° Für offene Teilräume $\Omega \subset E$ in einem normierten Raum E, insbesondere für $E = \mathbb{R}^n$, gilt daher: Ω ist genau dann zusammenhängend, wenn Ω kurvenzusammenhängend ist.

5° Das Lemma von Poincaré 30.16 gilt auch für so genannte *einfach zusammenhängende* Gebiete, das sind solche Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, in denen sich jede geschlossene Kurve innerhalb Ω auf stetige Weise zu einem Punkt deformieren lässt.

Ein kurvenzusammenhängender metrischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn die folgende Eigenschaft erfüllt ist: Ist $\gamma : [t_0, t_1] \to X$ stetig mit $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) =: a \in X$, so gibt es eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [t_0, t_1] \to X$$

mit $H(s,0) = H(s,1) = a$ (für jedes feste $s \in [0,1]$ ist $t \mapsto H(s,t)$ geschlossene Kurve in X, die in a beginnt und endet), $H(0,t) = \gamma(t)$ (für $s = 0$ handelt es sich um γ) und $H(1,t) = a$ (für $s = 1$ handelt es sich um die konstante Kurve). H heißt dann eine *Homotopie mit festgehaltenen Endpunkten*.

Offensichtlich sind konvexe und sternförmige Mengen einfach zusammenhängend. Aber auch die Kugelschalen $\Omega = \{x \in R^n : r < \|x\| < R\}$ zu $0 \le r < R \le \infty$ sind einfach zusammenhängend im Falle $n \neq 2$, wie auch die Sphären $\mathbb{S}^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \|y\|_2 = 1\}$ im Falle $n > 1$. $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}$ ist nicht einfach zusammenhängend, $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ ist nicht kurvenzusammenhängend.

Die viel diskutierte und kürzlich erst bewiesene Poincaré-Vermutung lautet: Jede einfach zusammenhängende, orientierte, 3-dimensionale und kompakte Mannigfaltigkeit ist isomorph (also topologisch äquivalent) zur 3-Sphäre $\mathbb{S}^3$.

[9] nicht vorgetragen aber z.T. in den Übungen behandelt.